Diese Gleichungen, sowie jene des vorigen Artikels, liefern, wie man sieht, die Summen neuer Reihen, sobald die Entwickelung einer oder zweier Functionen nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x gegeben ist. Es ist jedoch nicht schwer, auch die Summen von Reihen abzuleiten, welche auf andere als die oben vorausgesetzte Art aus den Entwickelungs-Coëfficienten a und b gebildet sind.

17.

Um dieses an einigen besonderen Fällen zu zeigen, multiplicire man die Gleichung:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx + \ldots$$

mit $\sin nx$ und integrire sie dann zwischen den Grenzen 0 und π. Bemerkt man hierauf, dass:

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin (n+m) x + \sin (n-m) x],$$

so erscheint das allgemeine Glied der Reihe in der Form:

$$\frac{1}{2} a_m \left\{ \int_0^\pi \sin (n+m) x \, dx + \int_0^\pi \sin (n-m) x . dx \right\}$$

aus welcher man auf der Stelle ersieht, dass jenes Glied immer verschwindet, wenn m und n gleichzeitig entweder gerade oder ungerade Zahlen sind, dass also nur diejenigen Fälle in Betracht kommen, in welchen m und n ungleichartig sind. Setzt man also $2m$ für m, und $2n+1$ für n und führt man die beiden Integrationen aus, so erfolgt:

$$a_{2m} \left\{ \frac{1}{2m+2n+1} + \frac{1}{2n-2m+1} \right\} = \frac{2(2n+1) a_{2m}}{(2n+1)^2 - 4m^2}$$

und man wird hierdurch zu der folgenden Gleichung geführt:

$$\frac{a_0}{(2n+1)^2} + \frac{a_2}{(2n+1)^2 - 4.1^2} + \frac{a_4}{(2n+1)^2 - 4.2^2} + \ldots + \frac{a_{2m}}{(2n+1)^2 - 4m^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4n+2} \int_0^\pi \varphi(x) \sin (2n+1) x . dx = \frac{\pi}{4} \frac{b_{2n+1}}{2n+1} \ldots (1)$$