

Das Gegenstück sind Kurven mit unendlich vielen viertelnden Ebenen. Daß solche möglich sind, soll an einem Beispiel gezeigt werden: Man gehe von einer Eifläche F aus, die eine Symmetrie-Ebene Σ hat; Q_1 sei der Schnitt von F und Σ . Ferner nehmen wir in Σ eine zweite konvexe Kurve Q an, die Q_1 in einem Punkte D berühren und im übrigen ganz innerhalb Q_1 verlaufen soll. Endlich sei Q die Leitlinie eines senkrechten Zylinders Z . Dann schneiden sich F und Z in einer Kurve K , die ebenfalls Σ als Symmetrie-Ebene hat; die zwei zueinander symmetrischen Teile hängen durch D als Doppelpunkt zusammen.¹ Sei nun P irgend ein Punkt der Kurve K , der von D verschieden ist und P_1 der in der Symmetrie entsprechende. Dann hat jeder der beiden (symmetrischen und gleichen) Bögen, in welche K durch P und P_1 geteilt wird, einen Halbierungspunkt und diese beiden Punkte entsprechen auch einander in der Symmetrie, liegen also mit P und P_1 in einer viertelnden Ebene. Es ändert sich nichts Wesentliches, wenn P nach D einrückt, so daß man die viertelnde Ebene über die ganze Kurve hinbewegen kann.²

Man kann jetzt den Doppelpunkt durch eine Formänderung beseitigen, indem man etwa auf dem einen Zweig von ihm aus beiderseits zwei Bögen mit den Endpunkten E_1, E_2 abträgt und dann das Stück $E_1 D E_2$ durch ein gleich langes ersetzt.³ Nimmt man nun das Stück $E_1 D E_2$ so klein, daß es viertelnde Ebenen von K gibt, die es in seiner ursprünglichen Lage nicht treffen, so bleiben mindestens diese viertelnden Ebenen als solche auch nach der Änderung erhalten. So sehen wir:

Satz 3: Es gibt einfache geschlossene Raumkurven mit einem Kontinuum von viertelnden Ebenen.

¹ Beim Durchlaufen der Kurve soll der Doppelpunkt stets so durchschritten werden, daß die Tangente sich stetig dreht; weitere Festsetzungen sind nötig, wenn D ein Selbstberührungspunkt ist.

² Will man ein Beispiel einer Kurve der vierten Familie haben, so denke man an das »Fenster des Viviani«. Es entsteht, wenn F eine Kugel und Z ein Kreiszyylinder ist, dessen Durchmesser dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

³ Etwa, indem man es um die Sehne $E_1 E_2$ passend dreht.