genügen muß. Setzt man die Werte von u_r und w in die zwei Gleichgewichtsbedingungen bei fehlender Massenkraft, ausgedrückt in den Verschiebungen, ein — die dritte ist infolge der Unabhängigkeit von ϑ von vornherein erfüllt —, so erkennt man, daß sie, wenn Gleichung (3) gilt, befriedigt werden. Unser Ansatz für u_r und w ist also in Verbindung mit Gleichung (3) eine Lösung des Systems der elastischen Grundgleichungen.

Für die Spannungen erhalten wir dann folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma \nabla \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right] \qquad \sigma_\vartheta = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma \nabla \Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right] \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma) \nabla \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right] \\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \sigma \nabla \Phi\right] \\
\tau_{r\vartheta} &= \tau_{\vartheta z} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Gleichung $\nabla \nabla \Phi = 0$ in Zylinderkoordinaten lautet

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \\ + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung 4. Ordnung hat ein vollständiges Integral von der Form[1]

$$\Phi = J_0(i\lambda r)\left[A\cos\lambda z + B\sin\lambda z\right] - \\ - \lambda r \frac{\partial}{\partial r} J_0(i\lambda r)\left[C\cos\lambda z + D\sin\lambda z\right]. \tag{5}$$

Dabei ist J_0 die Bessel'sche Funktion nullter Ordnung, A, B, C, D und λ sind beliebige reelle Konstante, i ist die imaginäre Einheit. Ebenso gibt jede Summe von derartigen Ausdrücken ein Integral von (3).

---

[1] Vgl. Love, l. c., p. 318.