Die kubische Ausdehnung ist gleich

$$\Delta = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

A. Erste Lösung.

Um bei der Mantelbeanspruchung durch eine Normalspannung, wo volle axiale Symmetrie herrscht, die Elastizitätsgleichungen zu integrieren, machen wir nach Love[1] folgenden Ansatz für die Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1+\sigma}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \\ w &= \frac{1+\sigma}{E} \left\{ (1-2\sigma) \nabla \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\}. \\ u_\vartheta &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

σ ist die Poisson'sche Konstante, E der Elastizitätsmodul, ∇ der Laplace'sche Operator, in unserem Falle, bei Zylinderkoordinaten, von der Form $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, Φ ist entsprechend der Symmetrie eine Funktion von r und z allein.

Die kubische Ausdehnung, die Dilatation, ist dann gleich

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{1+\sigma}{E} \Bigg\{ &-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-2\sigma) \nabla \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]\Bigg\} \\ = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E} &\frac{\partial}{\partial z} \nabla \Phi. \end{aligned} \tag{2}$$

Da die Dilatation immer eine harmonische Funktion sein muß, so ersieht man aus (2), daß Φ der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$\nabla \nabla \Phi = 0 \tag{3}$$

---

[1] Love, Lehrbuch der Elastizität, § 188, p. 315.