Aus (2) folgt: $4\alpha\beta = a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}$, weshalb $4\alpha\beta$ die bekannte Invariante bei Drehstreckungen der Affinität A ist.

Die Drehstreckung $Q_{/\!/}Q'$ ist reell, d. h. sie überführt einen reellen Punkt X in einen rellen X', wenn die Quaternionen Q, Q' reell sind, d. h. reelle Zahlen als Koordinaten haben. Entsprechend ist die Affinität $\underset{\sim}{Q}_{/\!/}\underset{\sim}{Q}'$ reell, wenn die symbolischen Quaternionen $\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{Q}'$ »reell«, d. h. ihre Koordinaten »reelle« Symbole sind.

Die Affinität $\underset{\sim}{Q}_{/\!/}\underset{\sim}{Q}'$ wird zu einer Affinität des R_3, wenn zwischen den symbolischen Quaternionen $\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{Q}'$ die Beziehung: $\underset{\sim}{Q}' = \underline{\underset{\sim}{Q}}$ besteht, wo dann die Gleichung der Affinität lautet: $\mathfrak{x}' = \underset{\sim}{Q}\mathfrak{x}\underline{\underset{\sim}{Q}}$. Denn ist $\xi = 0$, und ist $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$, $\beta = \alpha$, so wird nach (1):

$$\xi' = Sx' = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}).\mathfrak{x} - (\mathfrak{a}\beta+\alpha\mathfrak{b}).\mathfrak{x} + (\alpha\beta - \mathfrak{a}.\mathfrak{b})\xi = 0$$

also wird x' zu:

$$\mathfrak{x}' = (\alpha^2 - \mathfrak{a}^2)\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}\alpha\times\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}.\mathfrak{x}\mathfrak{a},$$

und dies ist die Gleichung einer Affinität des R_3, und zwar einer beliebigen, da der Skalar $\alpha^2 - \mathfrak{a}^2$, der Vektor $\mathfrak{a}\alpha$ und die symmetrische Dyade $\mathfrak{a};\mathfrak{a}$ zusammen 10 Konstanten haben, also um eine Konstante mehr als notwendig. Es kann daher noch

$$\alpha^2 - \mathfrak{a}^2 = S\underset{\sim}{Q}^2 = 0$$

gewählt werden, wenn $\underset{\sim}{Q}_{/\!/}\underline{\underset{\sim}{Q}}$ die allgemeine Affinität des R_3 sein soll. Ihre Gleichung lautet dann:

$$\mathfrak{x}' = \underset{\sim}{Q}\mathfrak{x}\underline{\underset{\sim}{Q}} = 2\mathfrak{a}.\mathfrak{x}\mathfrak{a} + 2\mathfrak{a}\alpha\times\mathfrak{x},$$

wodurch die Affinität auch schon in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Teil zerlegt erscheint.

18. Man zeigt leicht aus (2), daß $\underline{\underset{\sim}{Q}}_{/\!/}\underline{\underset{\sim}{Q}}'$, wo $\underline{\underset{\sim}{Q}} = -\mathfrak{a}+\alpha$, $\underline{\underset{\sim}{Q}}' = -\mathfrak{b}+\beta$, die zu $\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{Q}'$ konjugierten Quaternionen sind, die transponierte Affinität A_t der Affinität $A = \underset{\sim}{Q}_{/\!/}\underset{\sim}{Q}'$ ist, d. h. die Affinität, deren Matrix zu der von A transponiert ist. Dann sind $^1/_2[\underset{\sim}{Q}_{/\!/}\underset{\sim}{Q}' \pm \underline{\underset{\sim}{Q}}_{/\!/}\underline{\underset{\sim}{Q}}']$, beziehungsweise der symmetrische Teil A_s und der antisymmetrische Teil A_{as}