Sind $v_\varkappa$ die Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{v}$, so ergibt sich hieraus, daß die Elemente a_{ik} der Matrix der lineraren Transformation der $x_\varkappa, \xi$ in die $x'_\varkappa, \xi'$ sind:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha\beta + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_1 b_1,\\
a_{12} &= -a_2 b_1 - a_1 b_2 + \alpha b_3 - a_3\beta,\\
a_{13} &= -a_3 b_1 - a_1 b_3 - \alpha b_2 + a_2\beta,\\
a_{14} &= a_2 b_3 - a_3 b_2 + \alpha b_1 + a_1\beta,\\
a_{21} &= -a_1 b_2 - a_2 b_1 - \alpha b_3 + a_3\beta \text{ usw.}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nun sollen die Quaternionen Q, Q' symbolisch sein in der Weise, daß erst diese Aggregate a_{ik} ihrer Koordinaten $a_\varkappa, \alpha$ und $b_\varkappa, \beta$ aktual sind, d. h. unsymbolische Bedeutung als Zahlen haben.

Man hat dann die 16 Gleichungen (2) mit den 16 Produkten der Koordinaten von Q mit den Koordinaten von Q' als Unbekannten. Da die Determinante dieser Gleichungen, welche als Elemente nur die Zahlen 0, $+1$, -1 besitzt, nicht verschwindet (eine Potenz von 2 ist), so müssen auch diese Produkte sowie die a_{ik} aktual sein. Da die 16 Zahlen a_{ik} auch beliebig wählbar sind, so folgt: Die Transformation $Q_{//}Q'$ des Punktes X des R_4 in den Punkt X', deren Gleichung lautet: $x' = QxQ'$, wobei Q, Q' symbolische Quaternionen sind der Art, daß erst die kommutativen Produkte der Koordinaten von Q mit den Koordinaten von Q' aktuale Bedeutung als Zahlen haben, ist eine Affinität A des R_4 und jede Affinität des R_4 läßt sich in dieser Weise darstellen.

Es sind dann in (1) die $\mathfrak{a}\beta$, $\alpha\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ von einander unabhängige aktuale Vektoren, die zusammen 9 Konstanten haben; die Skalare $\alpha\beta \pm \mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ in (1) geben die zwei Konstanten $\mathfrak{a}\beta$, $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$. Ferner ist $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ eine Dyade mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ als symbolischen Vektoren.[1] Da aber in (1) nur die Verbindung $\mathfrak{a}.\mathfrak{x}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}.\mathfrak{x}$ eintritt, also nur der symmetrische Teil dieser Dyade, und $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ der Skalar dieser Dyade ist, der soeben gezählt wurde, so liefert dieser Teil für (1) nur 5 weitere Konstanten. Somit ergeben sich zusammen die 16 Konstanten von A.

---

[1] Siehe E. Waelsch, Über mehrfache Vektoren etc. Wiener Monatshefte, 17. Jahrg. (1906), p. 259.