Beweis: Die perfekte Menge P läßt sich eindeutig und stetig auf die Strecke $\frac{1}{2}-1$ abbilden. Bezeichnen wir das Bild der Menge R_λ auf der Menge P mit R_λ^P, so ist die Menge R_λ^P von der zweiten Kategorie in bezug auf die Menge P, da bei einer stetigen und eindeutigen Transformation eine Menge erster (zweiter) Kategorie in eine Menge erster (zweiter) Kategorie überführt wird.

Dadurch ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

Bezeichnen wir mit $f_\lambda(x)$ eine Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$f_\lambda(x) = 1 \text{ für alle Punkte der Menge } R_\lambda,$$
$$f_\lambda(x) = 0 \text{ für alle Punkte der Menge } C(R_\lambda),$$

so sind alle Funktionen $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots f_\omega(x) \ldots f_\lambda(x) \ldots$ im L. Sinne nichtmeßbar und keine Nullfunktionen.[1]

6. Satz: Es gibt $c = \aleph_\mu$ Funktionen, welche keine Nullfunktionen sind, und die alle zueinander orthogonal sind.

Beweis: Die Funktionen $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots f_\omega(x) \ldots f_\lambda(x) \ldots$ haben diese Eigenschaft. In der Tat, sind $f_\lambda(x)$ und $f_\varkappa(x)$ irgendwelche zwei Funktionen dieser Menge, wo $\lambda \neq \varkappa$ ist, so ist $f_\lambda(x) . f_\varkappa(x) \equiv 0$, weil die Mengen R_λ und $R_\varkappa$ keinen Punkt gemeinsam haben. Es ist also

$$\int_0^1 f_\lambda(x) f_\varkappa(x)\, dx = 0,$$

wenn $\varkappa \neq \lambda$ verschieden ist, für alle Funktionen

$$f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots f_\omega(x) \ldots f_\lambda(x) \ldots .$$

Diese Funktionen sind aber alle im L. Sinne nichtmeßbar.[2]

---

[1] Nullfunktion ist eine Funktion, welche überall höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge im L. Sinne, gleich Null ist.

[2] Jedes Orthogonalsystem von im L. Sinne meßbaren Funktionen ist abzählbar (Schmidt, G. E. C. R., *143*, p. 738).