Es ist nun[1]

$$\zeta(s)\,\zeta(s+1)=\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\pi^{2s}\zeta(-s)\,\zeta(-s+1)$$

$$=\frac{2^{1+s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-s)}{2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\pi^{2s}\zeta(-s)\,\zeta(-s+1)$$

$$=\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(s)}2^{2s}\pi^{2s}\zeta(-s)\,\zeta(-s+1),$$

also für $\sigma<-1$, speziell $\sigma=-\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{x^{s+k}\zeta(s)\,\zeta(s+1)}{s(s+1)\ldots(s+k)}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{s+k}\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(s+k+1)}\sigma(n)\,(4\pi^2 n)^s.$$

Die Reihe rechts darf über die unendliche Gerade gliedweise integriert werden, da ebenda

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^{s+k}|\sigma(n)|(4\pi^2 n)^s|=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\sigma+k}\sigma(n)\,(4\pi^2 n)^{\sigma}$$

wegen $\sigma<-1$ konvergiert, von t frei ist, und da

$$\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(s+k+1)}=O(t^{-2\sigma-k-1})=O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

ist. Also

$$\left.\begin{aligned}&F(x)-\Phi_k(x)\\&=\frac{1}{2\pi i}x^k\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)\int_{-\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{4}\right)-\infty i}^{-\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{4}\right)+\infty i}\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(s+k+1)}(4\pi^2 nx)^s\,ds.\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Nun habe ich in meiner in der Einleitung zitierten Arbeit aus den Berliner Sitzungsberichten[2] die Formel

$$\int_{-\vartheta-\infty i}^{-\vartheta+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-s\right)}{\Gamma(s+\rho+1)}w^s\,ds=\frac{2\pi i}{w^{\frac{\rho}{2}-\frac{k}{4}}}J_{\frac{k}{2}+\rho}(2\sqrt{w})\qquad(29)$$

[1] Vgl. p. 386—387, ebenda.

[2] p. 468—469.