Eigenschaft gehört: jeder in der Umgebung η [1] von P liegende Punkt von M ist mit P verbunden durch ein ganz in der Umgebung ε von P liegendes Kontinuum von M.

Die Menge M heißt zusammenhängend im kleinen, wenn sie in jedem ihrer Punkte zusammenhängend im kleinen ist.

Wir beschäftigen uns zunächst mit ebenen Punktmengen. Ich habe an anderer Stelle gezeigt: damit die ebene Punktmenge M stetiges Bild einer (abgeschlossenen) Strecke sei, ist notwendig, daß M ein im kleinen zusammenhängendes geschränktes Kontinuum sei. Wir wollen nun beweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Wir zeigen zunächst:

I. Ein im kleinen zusammenhängendes, geschränktes Kontinuum M ist gleichmäßig zusammenhängend im kleinen.

Darunter soll folgendes verstanden werden: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\eta > 0$ von folgender Eigenschaft: Je zwei Punkte P' und P'' von M, deren Abstand $< \eta$ ist, sind verbunden durch ein Kontinuum von M, das sowohl in der Nachbarschaft ε von P' als in der Nachbarschaft ε von P'' liegt.

Angenommen, die Behauptung gelte nicht; dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge von Punktepaaren P'_ν, P''_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in M, deren Abstände $\overline{P'_\nu P''_\nu}$ unter alle Grenzen sinken: $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{P'_\nu P''_\nu} = 0$, während jedes P'_ν mit P''_ν verbindende Kontinuum von M Punkte außerhalb der Umgebung ε von P'_ν oder P''_ν enthält. Aus der Folge der Paare P'_ν, P''_ν läßt sich nun, da M geschränkt ist, eine Teilfolge P'_{ν_i}, P''_{ν_i} herausgreifen, so daß sowohl die Punkte P'_{ν_i} als auch die Punkte P''_{ν_i} einen Grenzpunkt haben, die dann, wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{P'_\nu P''_\nu} = 0$ notwendig miteinander übereinstimmen:

$$\lim_{i=\infty} P'_{\nu_i} = \lim_{i=\infty} P''_{\nu_i} = P. \tag{1}$$

[1] Unter der Umgebung η eines Punktes P wird verstanden die Menge aller Punkte, deren Abstand von P kleiner als η ist.