Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen

von

C. Burstin in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juni 1914.)

In der vorliegenden Arbeit hebe ich zunächst einige charakteristische Eigenschaften der in Lebesgue'schem Sinne meßbaren und nichtmeßbaren Mengen hervor. Mit Hilfe einer einfachen mengentheoretischen Gleichung beschäftige ich mich dann mit dem Problem der Existenz der nichtmeßbaren Mengen. Der folgende Existenznachweis erfordert im wesentlichen nur den Mächtigkeitsbegriff, während das Prinzip der Wohlordnungsmöglichkeit und sogar das Auswahlprinzip als entbehrlich erscheinen. Endlich wird das Problem der Spaltung des Kontinuums in zwei überall dicht liegende Mengen zweiter Kategorie erledigt, und zwar wird die Existenz einer solchen Spaltung nachgewiesen.

§ 1.

Es sei gegeben irgendeine perfekte Menge M, welche auf einer Strecke AB von der Länge 1 liegt. Wir bezeichnen die Komplementärmenge der Menge M mit $N = C(M)$. Es können zwei Fälle eintreten: entweder ist die Menge meßbar im Sinne L und dann besteht die Relation $I_a(M)+I_a(N) = 1$, oder sie ist nichtmeßbar im Sinne L und dann besteht die Relation $I_a(M)+I_a(N) > 1$. Der Ausdruck:

$$I(\overline{AB})-I_a(N) = I_i(M)$$

wird als der innere Inhalt der Menge M bezeichnet. Es ist also für meßbare Mengen $I_a(M) = I_i(M)$ und für nichtmeßbare Mengen $I_a(M) > I_i(M)$.