Man erkennt aber sogleich, daß diese Annahme zu roh wäre und zu trivialen Resultaten führen würde. Hingegen dürfte man den realen Verhältnissen näher kommen, wenn man setzt

$$\psi(x) = e^{-\alpha x}.$$

Es hat dies bei reellem α den physikalischen Sinn, daß irgendeine Wandstelle durch ihre Rauhigkeit eine Wirbelung der Flüssigkeit veranlaßt, die nach der einen Richtung hin nur auf einer kurzen Strecke merkbar ist. Es liegt nahe anzunehmen, daß die Stärke der Wandrauhigkeit und daher die Länge der Strecke, auf der die Wirbelung noch merklich ist, von den Dimensionen des Rohres abhängt, derart, daß bei einem Rohre von größerem Radius auch die Wirbelstärke des Randwirbels auf einer längeren Strecke eine merkliche Größe hat als bei einem engeren Rohr, daß wir also etwa beispielsweise α verkehrt proportional zu r annehmen können. Hingegen würde imaginäres α einer periodischen Verteilung des Randwirbels entsprechen.

Die Differentialgleichung für X läßt sich unter den gegebenen Bedingungen in Hinsicht auf x nunmehr leicht integrieren, indem man setzt:

$$X = e^{-\alpha x} f(\rho, t),$$

und wir erhalten die Differentialgleichung für f

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\nu} u_0\right) f\right]$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} f &= 0 \text{ für } t = 0,\ \rho < r \\ f &= 1 \text{ für } t \geqq 0,\ \rho = r. \end{aligned}$$

Aufstellung der Turbulenzgleichung.

Die Differentialgleichung für $f(\rho, t)$ kann folgendermaßen gelöst werden: Wir setzen

$$f(\rho, t) = \varphi(\rho) + F(\rho, t).$$