$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge gegen das Integral $\int_a^b f dx$. Mit diesen Summen (2) hat sich, für den Fall, daß f halbstetig ist, Zoard de Geöcze eingehend beschäftigt.[1] Er sagt von einer Zerlegung D, sie habe den Quotienten Q, wenn für irgend zwei ihrer Teilintervalle die Ungleichung gilt:

$$Q \leqq \frac{x_i - x_{i-1}}{x_j - x_{j-1}} \leqq \frac{1}{Q}$$

und beweist, daß für jede im Lebesgue'schen Sinne integrierbare halbstetige Funktion f das Integral $\int_a^b f dx$ als Grenzwert von Summen (2) dargestellt werden kann, mit Hilfe einer ausgezeichneten Folge von Zerlegungen D_n, deren Quotient $\geqq \frac{1}{6}$ ist, und wo D_{n+1} aus D_n durch Unterteilung entsteht. An Stelle dieses speziellen Resultates soll nun im folgenden das allgemeine gesetzt werden, daß eine solche Annäherung durch Summen (2) an $\int_a^b f dx$ für jede im Lebesgue'schen Sinne integrierbare Funktion möglich ist, und zwar mit Hilfe von ausgezeichneten Zerlegungsfolgen D_n, bei denen D_{n+1} aus D_n durch Unterteilung entsteht, und für deren Quotienten Q_n gilt: $\lim_{n=\infty} Q_n = 1$. Durch genau dieselben Methoden kann man übrigens beweisen, daß die Annäherung an $\int_a^b f dx$ durch die speziellen Riemann'schen Summen

$$\sum_{i=1}^{\nu} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

[1] Bull. soc. math., *39*, p. 256 ff.