Über Annäherung an Lebesgue'sche Integrale durch Riemann'sche Summen

von

Hans Hahn in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Februar 1914.)

Ist die Funktion f(x) integrierbar im Sinne von Riemann im Intervalle < a, b>, so ist ihr Integral $\int_a^b f(x) dx$, der Riemann'schen Definition gemäß, Grenzwert von Summen folgender Gestalt: man nehme mit dem Intervalle < a, b> eine Zerlegung D vor, durch Einschalten der Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_{\nu} = b$$

wähle in jedem Teilintervalle $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nach Belieben den Punkt ξ_i und bilde die Summe:

$$\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}); \tag{1}$$

das Integral ist der Grenzwert dieser Summen, wenn die Zerlegung D eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge durchläuft.

Jede im Riemann'schen Sinne integrierbare Funktion ist auch integrierbar im Sinne von Lebesgue, und zwar ergeben beide Integraldefinitionen denselben Wert. Ist hingegen f(x) nur integrierbar im Sinne von Lebesgue, nicht aber im Sinne von

¹ Nach G. Kowalewski heißt eine Folge von Zerlegungen D_n des Intervalles < a, b> eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, wenn das größte in D_n auftretende Teilintervall für $n=\infty$ den Grenzwert 0 hat.