Unter der ersten Ableitung N' von N verstehen wir den aus allen Häufungselementen von N bestehenden Teil von M. Ist N abgeschlossen, so ist N' Teil von N. Bekanntlich ist N' stets abgeschlossen; denn ist m Häufungselement von N', so findet sich in jeder m enthaltenden Strecke (m_1, m_2) von M ein Element n' von N'; ist aber n' Element von N', so heißt das: In jeder das Element n' enthaltenden Strecke von M, speziell also auch in der Strecke (m_1, m_2), finden sich unendlich viele Elemente von N; also ist m Häufungselement von N und gehört somit zu N'.

Ist nun α irgend eine endliche oder transfinite Ordinalzahl, so wird in bekannter Weise die αte Ableitung $N^{(\alpha)}$ von N definiert durch die beiden Festsetzungen:

1. $N^{(\alpha+1)}$ ist die erste Ableitung von $N^{(\alpha)}$;
2. Für eine Limeszahl β ist $N^{(\beta)}$ der Durchschnitt aller $N^{(\alpha)}$ $(\alpha < \beta)$.

Durch Induktion beweist man, daß alle diese Ableitungen abgeschlossene Mengen sind: die Behauptung ist bewiesen für $\alpha = 1$; angenommen, sie sei richtig für alle $\alpha < \beta$; 1. Fall: β besitzt eine nächstkleinere Zahl $\beta - 1$; dann ist $N^{(\beta)}$ erste Ableitung von $N^{(\beta-1)}$ und daher, wie gezeigt, abgeschlossen. 2. Fall: β ist eine Limeszahl; sei m ein Häufungselement von $N^{(\beta)}$; jede m enthaltende Strecke (m_1, m_2) von M enthält dann unendlich viele Elemente von $N^{(\beta)}$, die — nach Definition von $N^{(\beta)}$ — auch allen $N^{(\alpha)}$ $(\alpha < \beta)$ angehören, so daß m auch für jedes $N^{(\alpha)}$ $(\alpha < \beta)$ Häufungselement ist; da aber nach Voraussetzung alle $N^{(\alpha)}$ $(\alpha < \beta)$ abgeschlossen sind, so ist m in allen $N^{(\alpha)}$ $(\alpha < \beta)$ und mithin auch im Durchschnitte $N^{(\beta)}$ aller dieser $N^{(\alpha)}$ enthalten, womit die Behauptung erwiesen ist.

Hieraus folgt: Ist $\alpha' > \alpha$, so ist $N^{(\alpha')}$ Teil von $N^{(\alpha)}$.

Ist $N^{(\alpha+1)} = N^{(\alpha)}$, so ist für alle $\alpha' > \alpha$ ebenfalls $N^{(\alpha')} = N^{(\alpha)}$. Ist $N^{(\alpha)} = 0$ (d. h. enthält $N^{(\alpha)}$ kein Element), so gilt dasselbe für alle $\alpha' > \alpha$.

Ist β eine Limeszahl und enthält $N^{(\alpha)}$ für alle $\alpha < \beta$ Elemente, so ist auch $N^{(\beta)} \neq 0$; in der Tat[1] betrachte

[1] Vgl. P. Mahlo, a. a. O., p. 323.