Zur Tschebyschef'schen Primzahlentheorie

von

Dr. E. Waage.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1913.)

1.

Die Funktion

$$\psi(x) = \Sigma \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p,$$

wo die Summe über alle Primzahlen $p \leqq x$ zu erstrecken ist, gewährt uns wesentliche Einblicke in die Verteilung der Primzahlen, wenn wir imstande sind, sie in Grenzen einzuschließen. Dies gelang Tschebyschef[1] und einigen neueren Autoren durch elementare Summenabschätzungen, wobei sie von der Beziehung

$$T(x) = \log([x]!) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots \qquad 1)$$

und geeignet gewählten Aggregaten

$$\Sigma a_i T\left(\frac{x}{i}\right) = T\left(\frac{x}{p}\right) + T\left(\frac{x}{p'}\right) + T\left(\frac{x}{p''}\right) + \dots -$$
$$- T\left(\frac{x}{q}\right) - T\left(\frac{x}{q'}\right) - T\left(\frac{x}{q''}\right) - \dots$$

ausgingen, die ich im folgenden mit $U(x)$ oder dem Sylvesterschen Symbol[2] $(p, p', p'', \dots; q, q', q'', \dots)$ bezeichnen werde.

---

[1] Mémoire sur les nombres premiers (Liouv. Journ., t. XVII, 1852).

[2] On Arithmetical Series (Messenger of Math., Ser. 2, Bd. 21, 1892), p. 88. Tschebyschef schrieb hierfür T.