Die letzte Forderung ist notwendig, weil sonst überhaupt von einer Bestimmung des z nicht die Rede sein könnte, da a unbekannt bleibt.

Diese Bestimmungen sollen dann zulässige heißen. Wir werden beweisen, daß dadurch aus f lineare homogene Funktionen der x werden und formulieren den Hauptsatz etwas ausführlicher:

Werden unter den möglichen Bestimmungen von z:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

die eine Gruppe normaler Beobachtungsresultate ergibt, nur jene zugelassen, die von systematischen Fehlern frei sind und die unbekannte physische Größe a nicht enthalten, so erscheint z in der Form:

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

wo die Konstanten λ der Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$$

unterliegen.

Beweis. Wir schreiben die Forderung

$$\mathrm{M.H.}\, f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a$$

ausführlicher:

$$\sum p_1^{(\alpha_1)} p_2^{(\alpha_2)} \ldots p_n^{(\alpha_n)} f(x_1^{(\alpha_1)}, x_2^{(\alpha_2)}, \ldots x_n^{(\alpha_n)}) = a. \tag{1}$$

Hier bedeutet

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

eine Gruppierung der Elemente der Reihen

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, \ldots m_1 \\ 1, 2, 3, \ldots m_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ 1, 2, 3, \ldots m_n \end{array}$$

in der Art, daß aus jeder Reihe ein und nur ein Element genommen wird. Es wird über alle diese Gruppierungen summiert. Außerdem ist:

$$p_i^{(1)} + p_i^{(2)} + \ldots + p_i^{(m_i)} = 1 \tag{2}$$