Die Gleichung

$$\alpha n(\alpha^2) = n(\alpha) + 7(\alpha - 1)$$

führt noch zu

$$\alpha^2 n(\alpha^2)^2 = n^2(\alpha) + 14(\alpha - 1)\, n(\alpha) + 49(\alpha - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{n(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} &= \alpha n(\alpha) + 14(\alpha^2 - \alpha) + \alpha(\alpha - 1)^2 \cdot \frac{49}{n(\alpha)} \\ &= 45 + 3\alpha + (4 + 9\alpha)\sqrt{-31}. \end{aligned}$$

Der Verband der Koeffizienten von $\varphi(\alpha)$ bildet demnach eine ideale Primzahl $\mathfrak{p}(\alpha)$ und es ist

$$\nabla \mathfrak{p}(\alpha) = n(\alpha)$$

$$\nabla n(\alpha) = \nabla^{(2)} \mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{p}(\alpha)^5 \mathfrak{p}(\alpha^2)^4$$

$$\mathfrak{p}(\alpha)^3 = \frac{n^2(\alpha^2)}{n(\alpha)} = 45 + 3\alpha + (4 + 9\alpha)\sqrt{-31}.$$

Die Gleichungen

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

$$x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha\, x_2 = n(\alpha)^{\frac{1}{3}}\, n(\alpha^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_0 + \alpha\, x_1 + \alpha^2 x_2 = n(\alpha^2)^{\frac{1}{3}}\, n(\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

führen zu der zyklischen Gleichung

$$x^3 - \frac{1}{3}(8 - 3\sqrt{-31})x - \frac{1}{27}(3 - 44\sqrt{-31}) = 0.$$