Das Produkt $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)$ hat demnach auf Grund der Kongruenz

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2) \equiv [(2+\sqrt{-3})u+(2+\sqrt{-31})v][(2-\sqrt{-3})u+ \\ +(2+\sqrt{-31})v]$$

$$\equiv (2+\sqrt{-31})^2 v^2+4(2+\sqrt{-31})uv \pmod 7$$

die Gestalt

$$7A+(2+\sqrt{-31})B$$

und es wird

$$[\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)]^3 = (8-3\sqrt{-31})\chi,$$

wo A, B, χ ganz und ganzzahlig in $\sqrt{-3}, \sqrt{-31}, t, u, v$ sind.

Die Koeffizienten

$$\frac{7^3}{8-3\sqrt{-31}} = 8+3\sqrt{-31}$$

$$\frac{(2+\sqrt{-31})^6}{8-3\sqrt{-31}} = (8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2$$

von u^6, v^6 in χ sind teilerfremd. Denn es seien a, b die Wurzeln der Kongruenzen

$$16a \equiv 1 \pmod{7^3}$$

$$19b \equiv 1 \pmod{7^3}.$$

Es ist dann

$$(8-3\sqrt{-31})a = 16a-a(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$

$$3(1-2\sqrt{-31})b = 19b-2b(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$

$$\pmod{8+3\sqrt{-31}}$$

und daher

$$9ab^2(8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2 \equiv 1 \pmod{8+3\sqrt{-31}}.$$

Sonach ist χ eine primitive Form.

Dasselbe gilt von ψ auf Grund der Gleichung

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^2) = \frac{\nabla\varphi(\alpha)}{n(\alpha)}\cdot\frac{\nabla\varphi(\alpha^2)}{n(\alpha^2)} = \frac{\varphi(\alpha)^3\varphi(\alpha^2)^3}{8-3\sqrt{-31}}$$

$$= \chi.$$