Die Gleichung

$$\varphi(\alpha^2)-\alpha n(\alpha)v = 7(t-\alpha v)+(2-\sqrt{-3})u$$

ergibt

$$(\varphi(\alpha^2)-\alpha n(\alpha)v)^2 = 49(t-\alpha v)^2+14(2-\sqrt{-3})u(t-\alpha v)$$
$$+(2-\sqrt{-3})^2u^2;$$

es ist aber

$$\frac{49}{n(\alpha)} = \frac{49n_1(\alpha)}{n(\alpha)n_1(\alpha)} = \frac{49n_1(\alpha)}{7(2-\alpha^2)} = (2-\alpha)n_1(\alpha)$$

$$\frac{7(2-\sqrt{-3})}{n(\alpha)} = \frac{7(2-\sqrt{-3})n_1(\alpha)}{n(\alpha)n_1(\alpha)} = -\alpha n_1(\alpha).$$

Sonach ist der Ausdruck

$$\frac{\varphi(\alpha^2)^2}{n(\alpha)}-\frac{(2-\sqrt{-3})^2}{n(\alpha)}u^2$$

und daher auch

$$\frac{\nabla\varphi(\alpha)}{n(\alpha)}-\frac{(2-\sqrt{-3})^2\varphi(\alpha)u^2}{n(\alpha)}$$

eine ganze algebraische Form; weil aber

$$\frac{(2-\sqrt{-3})^2\varphi(\alpha)}{n(\alpha)} =$$
$$= \frac{(2-\sqrt{-3})^2}{n(\alpha)}(7(t-\alpha v)+(2+\sqrt{-3})u+\alpha n(\alpha)v)$$
$$= \alpha(2-\sqrt{-3})^2v+\frac{7(2-\sqrt{-3})}{n(\alpha)}(u+(2-\sqrt{-3})(t-\alpha v))$$

algebraisch ganz ist, so ist auch $\frac{\nabla\varphi(\alpha)}{n(\alpha)}$ eine ganze algebraische Form $\psi(\alpha)$.

Ferner ist

$$7^3 = (8+3\sqrt{-31})(8-3\sqrt{-31})$$
$$7^2(2+\sqrt{-31}) = (-11+2\sqrt{-31})(8-3\sqrt{-31})$$
$$7(2+\sqrt{-31})^2 = -(12+\sqrt{-31})(8-3\sqrt{-31})$$
$$(2+\sqrt{-31})^3 = (1-2\sqrt{-31})(8-3\sqrt{-31}).$$