Man suche endlich die zu λ konjugiert-komplexe Größe $\bar{\lambda}$. Auf Grund von (36) kommt sukzessive:

$$\bar{\lambda}=\frac{x-iy}{\zeta+r}=-\frac{\eta}{\zeta+r}=-\frac{\xi\eta}{\xi(\zeta+r)}=-\frac{(\zeta-r)(\zeta+r)}{\xi(\zeta+r)}$$

$$=-\frac{\zeta-r}{\xi}=-\frac{1}{\dfrac{\xi}{\zeta-r}}=-\frac{1}{\lambda} \qquad (38)$$

und entsprechend $\bar{\Lambda}=-\dfrac{1}{\Lambda'}$.

Ersetzt man demgemäß in der ersten Formel (XVI) links wie rechts jede der auftretenden Größen durch ihre Konjugierte, so wird man, da α und δ, β und $-\gamma$ je zueinander konjugiert sind, gerade zu der zweiten Formel (XVI) geführt. Das ist der Klein'sche Satz: »Die orthogonale Substitution (1) ist bereits durch irgend eine der beiden Substitutionen (XVI) eindeutig dargestellt«.

Zum Schlusse möge auch der Rückweg von einer der Formeln (XVI) zu (XIV) explicite durchlaufen werden. Bezeichnet man durchwegs die zu einer Größe Konjugierte durch einen darübergesetzten horizontalen Strich, so forme man mit Rücksicht auf (37), (37') die Darstellung (XVI) um, wie folgt:

$$\lambda=\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha\Lambda+\beta}{\gamma\Lambda+\delta}=\frac{(\alpha\Lambda+\beta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda}+\bar{\delta})}{(\gamma\Lambda+\delta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda}+\bar{\delta})}$$

$$=\frac{\alpha\Xi+\beta(Z+r)}{\gamma\Xi+\delta(Z+r)}\cdot\frac{\beta H+\alpha(Z+r)}{\beta H+\alpha(Z+r)},$$

$$\lambda=\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha\beta\Xi H+\alpha^2\Xi(Z+r)+\beta^2 H(Z+r)+\alpha\beta(Z+r)^2}{\beta\gamma\Xi H+\alpha\gamma\Xi(Z+r)+\beta\delta H(Z+r)+\alpha\delta(Z+r)^2}. \qquad (39)$$

Da aber $\Xi H=(Z+r)(Z-r)$, hebt sich rechts in (39) der Faktor $Z+r$ heraus und man hat wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$:

$$\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha^2\Xi+\beta^2 H+2\alpha\beta Z}{\alpha\gamma\Xi+\beta\delta H+(\alpha\delta+\beta\gamma)Z+r}. \qquad (40)$$