(Der Verlauf der folgenden Rechnung zeigt, daß man es bereits mit einer zubereiteten Form zu tun hat.) Man findet

$$H(f) = -54f,$$

woraus hervorgeht, daß f in lineare Faktoren zerlegbar ist. Setzt man in der Gleichung $f = 0$

$$x_2 = 0, \quad x_3 = -1, \tag{22}$$

so geht sie über in

$$x_1^3 - 1 = 0$$

und hat die Wurzeln

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_1^{(2)} = \varepsilon, \quad a_1^{(3)} = \varepsilon^2,$$

wo ε die dritte Einheitswurzel bedeutet. Setzt man diese Werte und die Werte (22) in die Ableitungen f_1, f_2, f_3, so erhält man schließlich

$$f \equiv (x_1 + x_2 + x_3)(\varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2 + x_3)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3).$$

§ 17. Quaternäre Formen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen der Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in lineare Faktoren läßt sich nach § 14 so aussprechen, daß die den Elementen f_{33}, f_{34}, f_{44} adjungierten Minoren von $H(f)$ durch f teilbar sein müssen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Minor $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ nicht identisch verschwindet und zu f teilerfremd ist.

Diese Bedingung läßt sich durch geometrische Schlüsse, welche den im § 16 angewandten analog sind, nur zum Teile verifizieren.

Da nämlich die Fläche $f = 0$ alle Punkte, in denen die Krümmung gleich Null ist, mit der Hesse'schen Fläche $H(f) = 0$ gemeinsam hat, so folgt aus dem Zerfallen der Fläche $f = 0$ in lauter einfach zu zählende Ebenen, daß $H(f)$ durch f teilbar ist. Hingegen folgt aus der Teilbarkeit von $H(f)$ durch f nur, daß die Fläche $f = 0$ in allen ihren Punkten die Krümmung Null hat und somit in die Ebene abwickelbar ist.