und dieser Gleichung leistet $z = Y$ als particuläres Integral Genüge.

Zur Bestimmung des allgemeinen Integrals:

$$z = Y + u$$

erhält man daher die Gleichung:

$$2\frac{\partial u}{\partial y} - 2uY - u^2 = 0,$$

aus welcher sich

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2} e^{-\int Y dy} \left[X - \int e^{\int Y dy} dy\right]$$

ergibt, unter X eine willkürliche Function von x verstanden. Man hat also

$$z = Y + \frac{2e^{\int Y dy}}{X - \int e^{\int Y dy} dy}$$

womit das allgemeine Integral der Gleichung (1) gefunden ist.

Um dasselbe in die gebräuchliche Form zu bringen, sei

$$X = e^{-\varphi(x)}, \qquad \int e^{\int Y dy} dy = e^{\psi(y)}$$

also:

$$e^{\int Y dy} = e^{\psi(y)} . \psi'(y), \quad Y = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y)$$

Dann folgt:

$$z = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2 . \frac{e^{\varphi(x) + \psi(y)} . \psi'(y)}{1 - e^{\varphi(x) + \psi(y)}}$$

worin nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zwei willkürliche Functionen bezeichnen.

Liouville bemerkt a. a. O., dass er das Detail der Betrachtungen, durch welche er zu diesem Integral gelangt sei, unterdrücke und sich auf den Nachweis beschränke, dass letzteres der gegebenen Gleichung in der That Genüge leistet, und dasselbe geschieht in allen mir bekannten Schriften, in welchen von der Gleichung (1) die Rede ist. Da aber die blosse Verification umständlicher ist, als die vorstehende directe Herleitung, so scheint es, dass Liouville nicht auf dem oben eingeschlagenen Wege zu seinem Resultat gelangt sei.