Über den Werth des Ausdrucks

$$\frac{1}{(m+\delta)^\varepsilon}+\frac{1}{(m+2\delta)^\varepsilon}+\frac{1}{(m+3\delta)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{\{m+m(n-1)\delta\}^\varepsilon}$$

für $m=\infty$ *und über das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen.*

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 16. April 1868.)

Bereits im 55. Band der Sitzungsberichte haben wir durch eine völlig strenge Methode nachgewiesen, daß für $m=\infty$

$$(1)\quad \lim\left\{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{2m}\right\}=\lg 2,$$

wir wollen im Folgenden eine ähnliche Untersuchung über die Limite des obigen etwas allgemeineren Ausdruckes mittheilen unter der Voraussetzung, daß n eine ganze positive Zahl, hingegen δ und ε beliebige positive oder negative Größen sind. Ein beliebiges Glied desselben, wie $1:(m+r\delta)^\varepsilon$ kann immer, so lange $r\delta<m$ in eine unendliche Reihe entwickelt werden; es ist

$$\frac{1}{(m+r\delta)^\varepsilon}=\frac{1}{m^\varepsilon}\left\{1+\binom{-\varepsilon}{1}\left(\frac{r\delta}{m}\right)+\binom{-\varepsilon}{2}\left(\frac{r\delta}{m}\right)^2+\binom{-\varepsilon}{3}\left(\frac{r\delta}{m}\right)^3+\ldots\right\},$$

mithin

$$\sum_1^{m(n-1)}\frac{1}{(m+r\delta)^\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{m^\varepsilon}\left\{m(n-1)+\binom{-\varepsilon}{1}\left(\frac{\delta}{m}\right)\Sigma r+\binom{-\varepsilon}{2}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2\Sigma r^2+\binom{-\varepsilon}{3}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3\Sigma r^3+\ldots\right\}$$

wobei die Summation rechter Hand auf dieselben Werthe von r zu erstrecken ist.

Der Übergang zur Grenze für $m=\infty$ gibt sofort die Gleichung

$$(2)\qquad \lim\sum_1^{m(n-1)}\frac{1}{(m+r\delta)^\varepsilon}=$$

$$=\lim.m^{1-\varepsilon}.\left\{(n-1)+\binom{-\varepsilon}{1}\delta\lim\left(\frac{1}{m^2}\Sigma r\right)+\binom{-\varepsilon}{2}\delta^2\lim\left(\frac{1}{m^3}\Sigma r^2\right)+\binom{-\varepsilon}{3}\delta^3\lim\left(\frac{1}{m^4}\Sigma r^3\right)+\ldots\right\}.$$