und $\left[\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \ldots\ldots + 1\right]\Delta^r u_g$

d. h. wie man mittelst oben benützter Eigenschaft der Grössen von der Form $\binom{n}{r}$ leicht sieht,

$$\text{zwischen}\binom{n}{r}\ \Delta^r u_k \text{ und } \binom{n}{r}\Delta^r u_g.$$

Lässt sich dem in der Grössenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots$ herrschenden Gesetze gemäss $\Delta^r u_n$ als eine Function von n darstellen, welche durch $F(n)$ angedeutet werde, so lassen sich obige Ausdrücke als besondere Werthe der Functionen

$$(n-r+1)\binom{r-z-1}{r-1}F(z)$$

und

$$\binom{n}{r}F(z)$$

für $z=k$ und $z=g$ betrachten.

Ändert sich $F(z)$, während z vom Werthe k zum Werthe g stetig übergeht, gleichfalls nach dem Gesetze der Stetigkeit, so gibt es sicher einen zwischen k und g, also um so mehr zwischen 0 und $n-r$ liegenden Werth für z, bezüglich dessen

$$R_n = (n-r+1)\binom{n-z-1}{r-1}F(z)$$

oder auch

$$R_n = \binom{n}{r}F(z)$$

gesetzt werden darf, wobei natürlich der Werth von z im zweiten Falle von jenem im ersten verschieden gedacht wird.

Die Anwendung dieser Resultate auf die Herstellung der Taylor'schen Formel sammt ihrer Ergänzung unterliegt keiner Schwierigkeit. Hierüber darf ich mich hier wohl ganz kurz fassen.

Setzt man $u_n = f(x + nw)$, also $u_0 = f(x)$ wobei $f(x)$ irgend eine durchgehends angebbare Function der Veränderlichen x vorstellt, und lässt man $nw = h$ sein; denkt man sich ferner h als eine bestimmte Grösse und die ganze Zahl n ins Unendliche wachsend, foglich $w = \frac{h}{n}$ unendlich klein werdend, so ergibt sich auf die bekannte Weise unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Function $f(x)$ und ihrer Differentialquotienten in der Gegend des für x gewählten Werthes

$$f(x + h = f(x) + h \lim. \frac{\Delta f(x)}{w} + \frac{h^2}{1.2} \lim. \frac{\Delta^2 f(x)}{w^2} + \ldots.$$