Man setze nun

$$\binom{n}{r}\Delta^r u_0 + \binom{n}{r+1}\Delta^{r+1}u_0 + \ldots + \Delta^n u_0 = R_n,$$

so dass R_n den Rest vorstellt, welchen man weglässt, wenn man den Ausdruck für u_n unmittelbar von dem Gliede $\binom{n}{r}\Delta^r u_0$ abbricht. Man kann in R_n statt der Anfangsglieder der auf die $r$te folgenden Differenzreihen, nämlich statt der Grössen

$$\Delta^{r+1}u_0,\ \Delta^{r+2}u_0,\ \ldots\ \Delta^n u_0$$

die Glieder der $r$ten Differenzenreihe selbst, wovon die eben genannten abhängen, nämlich

$$\Delta^r u_1,\ \Delta^r u_2,\ \Delta^r u_3,\ \ldots\ \Delta^r u_{n-r}$$

einführen. Ich habe dies bereits in meinen im Jahre 1827 erschienenen Vorlesungen über die höhere Mathematik (I. Bd., S. 251 u. ff.) gethan; nachstehender Vorgang führt jedoch einfacher zum Ziele.

Setzt man $n+1$ an die Stelle von n, so hat man

$$R_{n+1} = \binom{n+1}{r}\Delta^r u_0 + \binom{n+1}{r+1}\Delta^{r+1}u_0 + \ldots + \Delta^{n+1}u_0.$$

Es ist aber, wie schon aus dem Pascal'schen Dreiecke erhellet, und auch aus dem Bildungsgesetze von $\binom{n}{r}$ leicht nachgewiesen werden kann,

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r};$$

daher kann man auch setzen:

$$\begin{aligned} R_{n+1} = &\left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right]\Delta^r u_0 + \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}\right]\Delta^{r+1}u_0 \\ &+ \left[\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2}\right]\Delta^{r+2}u_0 + \ldots \\ \ldots &+ \left[\binom{n}{n-1} + 1\right]\Delta^n u_0 + {}^{n+1}u_0. \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass

$$\Delta^r u_0 + \Delta^{r+1}u_0 = \Delta^r u_1,\ \Delta^{r+1}u_0 + \Delta^{r+2}u_0 = \Delta^{r+1}u_1,\ \text{u. s. w.}$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} Rn + 1 = \binom{n}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n}{r}\Delta^r u_1 + \binom{n}{r+1}\Delta^{r+1}u_1 + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}u_1 + \Delta^n u_1. \end{aligned}$$

Die Summe der Glieder dieses Ausdruckes vom zweiten angefangen, ist der Ausdruck, in welchen R_n übergeht, wenn die Reihe

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{n+1}$$

an die Stelle von

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n$$