also:

$$sin\ E = \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + r\,r_1 + r_1^2}},\quad sin\ E_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r\,r_1 + r_1^2}};$$

welche Formeln es aber unbestimmt lassen, ob die Winkel E und E_1 spitz oder stumpf sind.

Leicht erhält man nun auch:

$$cos\ E^2 = \frac{r\,(r + r_1)}{r^2 + r\,r_1 + r_1^2},\quad cos\ E_1{}^2 = \frac{r_1\,(r + r_1)}{r^2 + r\,r_1 + r_1^2};$$

folglich:

$$tang\ E^2 = \frac{r_1^2}{r\,(r + r_1)},\quad tang\ E_1{}^2 = \frac{r^2}{r_1\,(r + r_1)}$$

oder:

$$tang\ E^2 = \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2}{1 + \frac{r_1}{r}},\quad tang\ E_1{}^2 = \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{1 + \frac{r}{r_1}};$$

woraus sich ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$tang\ E = \pm \frac{\frac{r_1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{r_1}{r}}},\quad tang\ E_1 = \pm \frac{\frac{r}{r_1}}{\sqrt{1 + \frac{r}{r_1}}}$$

ergibt, und die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die betreffenden Winkel spitz oder stumpf sind; ob aber das Erste oder das Zweite der Fall sei, darüber liefern natürlich diese Formeln gar keine Entscheidung, so einfach dieselben auch an sich sind; eine solche Entscheidung liefern nur die oben von mir gegebenen, bis jetzt noch nicht bekannten Ausdrücke von *cos E* und *cos* E_1, welche freilich weitläufiger sind. Die vorhergehenden Ausdrücke von *tang E* und *tang* E_1 sind die, welche bis jetzt allein in den astronomischen Lehrbüchern vorkommen; ihre erste Erfindung scheint Keill (a. a. O. S. 236) zu gebühren, wie auch Delambre in seiner Astronomie théorique et pratique, Tom. III, pag. 8 bemerkt.

Endlich erhalten wir aus dem Obigen noch zur Bestimmung des Winkels S die folgende ganz allgemein giltige Formel:

$$cos\ S = \frac{r\sqrt{r_1} \pm r_1\sqrt{r}}{r_1\sqrt{r_1} \pm r\sqrt{r}}.$$